第 2 章　矩阵及其运算

矩阵是线性代数研究的主要对象和重要工具，它在数学的其他分支及自然科学、工程技术和经济等领域中都有着广泛应用. 本章主要讨论矩阵的概念、性质及基本运算.

2.1　矩阵的基本概念

在一些实际问题中，为了系统、清楚地描述各因素之间的数量关系，常常将一些数据按一定顺序排成一个表格形式.

例 2.1.1　某企业生产甲、乙两种产品，需用 a, b, c, d 四种原料，每生产 1 吨产品所需原料的数量(kg)如下表.

原料 / 数量 / 产品	a	b	c	d
甲	30	20	40	10
乙	20	40	10	30

若指定用行(横排)表示产品，用列(纵排)表示原料，则上表可简单地表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}30 & 20 & 40 & 10\\ 20 & 40 & 10 & 30\end{pmatrix}.$$

若已知购买 a, b, c, d 四种原料每千克的价格及运输费用如下表.

费用 / 原料	价格	运费
a	50	3
b	15	1
c	32	6
d	21	5

则每千克原料的价格可表示为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}50 & 3\\ 15 & 1\\ 32 & 6\\ 21 & 5\end{pmatrix}$.

数表 $\boldsymbol{A}$ 可以清楚显示原料在产品中的数字信息，数表 $\boldsymbol{B}$ 则显示了每千克原料的费用信息. 所谓矩阵，就是这样按一定顺序组成的数表.

定义 2.1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\,(i=1,\,2,\,\cdots,\,m;\,j=1,\,2,\,\cdots,\,n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形数表称为一个 $\boldsymbol{m\times n}$ **矩阵**，并记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

矩阵中的 $m\times n$ 个数称为矩阵的**元素**，矩阵中位于第 i 行第 j 列的元素用 a_{ij} 表示.

一般地，矩阵用大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 等表示，或简记为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$(a_{ij})$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$. 当矩阵中的元素都是实数时，称为**实矩阵**，元素是复数时，称为**复矩阵**. 若矩阵的元素都是 0，则称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，在不致混淆时简记为 $\boldsymbol{O}$.

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n)$$

称为**行矩阵**，只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**.

当矩阵的行数与列数都是 n 时，称为 n 阶**方阵**，简记为 $\boldsymbol{A}_n$.

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若除主对角线上的元素 a_{ii} 以外，其余的元素均为 0，即 $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为对角矩阵，简称**对角阵**. 特殊地，主对角线上的元素 a_{ii} 均为 1 的对角矩阵，即 $a_{ij}=\begin{cases}1, & i=j, \\ 0, & i\neq j\end{cases}$ 称为 n 阶**单位矩阵**，简称**单位阵**，记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$，即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

当两个矩阵具有相同的行数和相同的列数时，称这两个矩阵为**同型矩阵**.

定义 2.1.2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 为同型矩阵，若满足 $a_{ij}=b_{ij}(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

显然，只有当两个同型矩阵的对应元素都相等时，这两个矩阵才能相等.

2.2 矩阵的运算

2.2.1 矩阵的加法

定义 2.2.1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 为两个同型矩阵，则称矩阵

$$\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之和，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

由定义不难看出，矩阵加法是对应元素相加，因此只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 为同型矩阵，则矩阵加法满足下列运算律：

1）交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

2）结合律 $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 为两个同型矩阵，若有 $b_{ij}=-a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记作 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$，即 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$.

由负矩阵和矩阵加法可以定义矩阵的减法.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 为两个同型矩阵，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})$.

显然，$\boldsymbol{A}_{m\times n}-\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$；$\boldsymbol{A}_{m\times n}+\boldsymbol{O}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$；$\boldsymbol{A}_{m\times n}-\boldsymbol{O}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

2.2.2 数与矩阵的乘法

定义 2.2.2 设 k 是一个数，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，数 k 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$（简称数乘矩阵）定义为

$$k\boldsymbol{A}=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

数乘矩阵满足下列运算规律：

1) 结合律 $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$;

2) 分配律 $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$; $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

2.2.3 矩阵的乘法

例 2.2.1 在例 2.1.1 所研究的问题中,考虑甲乙两产品的成本(不考虑其他费用)见下表.

成本 / 产品	价 格	运 费
甲	$30\times50+20\times15+40\times32+10\times21$	$30\times3+20\times1+40\times6+10\times5$
乙	$20\times50+40\times15+10\times32+30\times21$	$20\times3+40\times1+10\times6+30\times5$

那么,若记生产 1 吨产品所需的费用为矩阵 $\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{C}$ 可表示为原料的数量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与单位成本矩阵 $\boldsymbol{B}$ 乘积的形式,即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}30&20&40&10\\20&40&10&30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50&3\\15&1\\32&6\\21&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3290&400\\2550&310\end{pmatrix}.$$

像例 2.2.3 中的这种运算在科学研究和工程实践中是很常见的,数学上把这种运算定义为矩阵的乘积.

定义 2.2.3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,则矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$,其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$,称 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积,记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$. 即 $\boldsymbol{AB}=(a_{ij})_{m\times s}(b_{ij})_{s\times n}=\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n}$.

由矩阵乘法定义不难看出:只有当左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时,矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义;并且,乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行数等于左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数,其列数等于右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数;乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 中第 i 行第 j 列的元素 c_{ij} 等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的 s 个元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的 s 个元素对应乘积之和.

例 2.2.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&-1&1\\-1&1&3&0\\0&2&-1&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&3&2\\1&2&1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$,计算 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 由矩阵乘积的定义可得

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 8 \\ 4 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 7 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

例 2.2.3 设矩阵 $\boldsymbol{A} = (1, 2, -1, 0)$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 由矩阵乘积的定义易得

$$\boldsymbol{AB} = (1, 2, -1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1, 2, -1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由上面的例不难看出 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. 因此，一般地，矩阵乘积对于交换律是不成立的. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

例 2.2.4 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{AE}_3$.

解 由矩阵乘积的定义易得

$$\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A};$$

$$\boldsymbol{AE}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}.$$

一般地，设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，分别为 m 阶和 n 阶方阵，则有 $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AE}_n = \boldsymbol{A}$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 使下列矩阵乘法都有意义，则矩阵乘法满足下列规则：

1) 结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

2) 分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$.

对于 n 阶方阵，可以定义乘幂运算.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，规定

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E};\quad \boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A};\quad \boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}\quad (k\text{ 为非负整数}).$$

对于 n 阶方阵的幂，有如下运算规律：

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l};\quad (\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}.$$

值得注意的是，由于矩阵乘法不满足交换律，一般地 $(\boldsymbol{AB})^k\neq A^k\boldsymbol{B}^k$. 而只有当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换时，才有$(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

例 2.2.5 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的，试证明 $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

证 用数学归纳法. 显然，当 $k=1$ 时，有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AB}$，等式成立. 假设当 $k-1$ 时结论成立，即$(\boldsymbol{AB})^{k-1}=\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}^{k-1}$. 考虑 k 时的情况，因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的，所以，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB})^k&=(\boldsymbol{AB})^{k-1}(\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}^{k-1})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}^{k-1}(\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{k-1}(\boldsymbol{B}^{k-2}\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}\\&=\cdots=\boldsymbol{A}^{k-1}(\boldsymbol{AB}^{k-1})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k.\end{aligned}$$

于是结论成立.

设多项式 $f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m=\sum\limits_{i=0}^{m}a_i\lambda^{m-i}$，$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，称矩阵

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^0=a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_m\boldsymbol{E}=\sum_{i=0}^{m}a_i\boldsymbol{A}^{m-i}$$

为**方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式**.

例 2.2.6 设 $f(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+3$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$，求矩阵多项式 $f(\boldsymbol{A})$.

解 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}8&2&4\\11&2&5\\-1&0&-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}7&0&2\\5&3&1\\-3&2&2\end{pmatrix}$.

矩阵的乘法运算在科学研究和工程实践中有着非常广泛的应用，是数学学科，

尤其是线性代数中的重要运算.有许多问题可以由矩阵乘积来表示.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$, 则线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \tag{2.2.1}$$

可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. 称 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 为方程组(2.2.1)的**矩阵表示**.

设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $n\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 和 $m\times 1$ 矩阵

$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, 使得 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$, 即 $\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n, \end{cases}$

则称 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$ 为一个从 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{y}$ 的**线性变换**. 称 $\boldsymbol{A}$ 为该线性变换的**变换矩阵**.

若另有线性变换 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{By}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sm} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_s \end{pmatrix}$, 则从 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{z}$ 的线性变换为

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{By}=\boldsymbol{BAx}=\boldsymbol{Cx},$$

其中 $C=BA=(c_{ij})_{s\times n}$, 即

$$z_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{in}x_n=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}x_k,$$

其中 $c_{ij}=b_{i1}a_{1j}+b_{i2}a_{2j}+\cdots+b_{im}a_{mj}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$.

例 2.2.7 设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$，有两个线性变换：$\begin{cases}x_1=3y_1+y_2-y_3+y_4,\\x_2=-y_1-2y_2-y_4,\\x_3=y_1+2y_2+y_3-y_4\end{cases}$ 和 $\begin{cases}y_1=-z_1-z_2+z_3,\\y_2=2z_1+z_2-z_3,\\y_3=4z_1+2z_2+5z_3,\\y_4=3z_1+6z_3,\end{cases}$ 试求从 $\boldsymbol{z}$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的线性变换.

解 由题意知从 $\boldsymbol{y}$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的变换矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&-1&1\\-1&-2&0&-1\\1&2&1&-1\end{pmatrix}$，从 $\boldsymbol{z}$ 到 $\boldsymbol{y}$ 的变换矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&1&-1\\4&2&5\\3&0&6\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ay}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Bz}$. 于是

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bz})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}3&1&-1&1\\-1&-2&0&-1\\1&2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&1&-1\\4&2&5\\3&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&-4&3\\-6&-1&-5\\4&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}.$$

那么，从 $\boldsymbol{z}$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的线性变换为 $\begin{cases}x_1=-2z_1-4z_2+2z_3,\\x_2=-6z_1-z_2-5z_3,\\x_3=4z_1+3z_2-2z_3.\end{cases}$

2.2.4 矩阵的转置

定义 2.2.4 将 $m\times n$ 矩阵设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$ 的行和列互换所得到的 $n\times m$ 矩阵 $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$（或 $\boldsymbol{A}'$），即

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

由定义不难看出，$m\times n$ 矩阵的转置是 $n\times m$ 矩阵. 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(b_{ij})_{n\times m}$，则 $b_{ij}=a_{ji}$，$i=1, 2, \cdots, n$；$j=1, 2, \cdots, m$.

例 2.2.8 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$，计算 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

解 因为 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$，故

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -2 \\ 8 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -2 \\ 8 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

当运算有意义时，矩阵的转置满足如下运算规律：

1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；　　2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；　　4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

证 这里只证明 4). 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，并设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$，则 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，故 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 中位于第 i 行第 j 列的元素为 $c_{ji}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$，即 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}\right)$. 由于 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(b_{ki})_{n\times s}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{jk})_{s\times m}$，故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 中位于第 i 行第 j 列的元素为 $\sum\limits_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$，即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}\right)$. 于是 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

特殊地，对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**. 显然 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为对称矩阵的充要条件是 $a_{ij}=a_{ji}$，$i, j=1, 2, \cdots, n$.

2.2.5 方阵的行列式

定义 2.2.5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，以 $\boldsymbol{A}$ 的元素按其在矩阵中的原位置构成一个

行列式，称该行列式为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. 记作 $\det(\boldsymbol{A})$，或 $|\boldsymbol{A}|$.

应当注意，方阵与方阵的行列式是两个不同的概念，方阵是一个数表，而它的行列式则是一个数值. 它们在表示方法上也不同，希望读者不要混淆.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $\det(\boldsymbol{A})=0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**奇异矩阵**；若 $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**非奇异矩阵**. 方阵的奇异性在后面的讨论中有很多应用.

方阵的行列式有如下性质：设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，k 为数，则

1) $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\det(\boldsymbol{A})$；

2) $\det(k\boldsymbol{A})=k^n\det(\boldsymbol{A})$；

3) $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$.

这里仅证明 3)，设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 都是 n 阶方阵，由例 1.2.2 易知 $2n$ 阶方阵

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\det(\boldsymbol{A})\ \det(\boldsymbol{B}).$$

利用行列式的性质对 D 进行如下运算：第一列乘以 b_{1j}，第二列乘以 b_{2j}，…，第 n 列乘以 b_{nj}，都加到第 $n+j$ 列上($j=1, 2, \cdots, n$)，即

$$D\xlongequal[j=1,\,2,\,\cdots,\,n]{c_{n+j}+\sum\limits_{k=1}^{n}b_{kj}c_k}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，那么 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})=\boldsymbol{AB}$. 再将上行列式第 i 行与第 $n+i$ 行

互换,可得

$$D \xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{r_i \leftrightarrow r_{n+i}} (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{C}) = \det(\boldsymbol{AB}).$$

例 2.2.9 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$,求 $\det(\boldsymbol{AB})$.

解 容易计算 $\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $\det(\boldsymbol{B}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 14$,

于是 $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}) = -14$.

矩阵乘积的行列式的运算规律,可推广到有限个矩阵的情况. 设 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$ 都是 n 阶方阵,则 $\det(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m) = \det(\boldsymbol{A}_1)\det(\boldsymbol{A}_2)\cdots\det(\boldsymbol{A}_m)$.

由矩阵乘积的行列式的运算规律不难得出以下结论.

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵,矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 为奇异矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中至少有一个是奇异矩阵.

2.2.6 共轭矩阵

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 为复矩阵,用 $\bar{a}_{ij}$ 表示元素 a_{ij} 的共轭复数,则称 $\bar{\boldsymbol{A}} = (\bar{a}_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵.

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是复数矩阵,并且下面所涉及的运算都是可行的,则共轭矩阵具有下列运算规律:

(1) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \bar{\boldsymbol{A}} + \bar{\boldsymbol{B}}$; (2) $\overline{k\boldsymbol{A}} = \bar{k}\bar{\boldsymbol{A}}$(其中 k 为复数); (3) $\overline{\boldsymbol{AB}} = \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{B}}$.

此处证明从略.

2.3 矩阵的逆

在初等代数中,求解一元一次方程 $ax=b$ 时,若 $a\neq 0$,可利用性质 $a^{-1}a=1$,对方程两端同时乘以 a^{-1},则可得到方程的解为: $x=a^{-1}b$. 在矩阵运算中,由于任何矩阵 $\boldsymbol{X}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 相乘,其积不变,即 $\boldsymbol{EX}=\boldsymbol{X}$. 那么,对于矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}$,若有矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,则与解一元一次方程类似地,对矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}$ 两端同时左乘以矩阵 $\boldsymbol{B}$,亦可得到 $\boldsymbol{BAX}=\boldsymbol{BY}$,即可得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BY}$. 那么,在什么情况下可以进行这样的计算呢? 为了解决这个问题,本节给出逆矩阵的概念.

定义 2.3.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,若存在矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 成立,则称 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆矩阵**,并称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**.

设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 均为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$. 那么有

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BE}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{EC}=\boldsymbol{C}$,因此 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 由此可得以下定理.

定理 2.3.1 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的,并将 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

下面讨论在什么条件下矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的,若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,如何求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的问题.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,用 A_{ij} 表示行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式,则称矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**.

例 2.3.1 设 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,证明 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$.

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$,记 $\boldsymbol{AA}^*=(b_{ij})_n$,则

$$b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}\det(\boldsymbol{A}), & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\text{故}, \boldsymbol{AA}^*=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}.$$

类似有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\left(\sum_{k=1}^{n}A_{ki}a_{kj}\right)=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$.

定理 2.3.2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*$.

证 先证明必要性. 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则存在 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$，于是 $\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^{-1})=\det(\boldsymbol{E})=1$，故 $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$.

再证充分性. 设 $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$，令 $\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^{*}$，有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^{*}$.

换句话说，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆$\Leftrightarrow$$\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.

推论 2.3.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若存在矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$)成立，则 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，并且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

证 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，故 $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})=1$，于是 $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 于是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EB}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}^{-1}$.

容易证明，可逆矩阵具有以下简单性质.

性质 2.3.1 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是可逆矩阵，并且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}$，即 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

性质 2.3.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，常数 $k\neq 0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 也可逆，并且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.

性质 2.3.3 设矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 亦可逆，并且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

例 2.3.2 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 经计算可得 $\det(\boldsymbol{A})=3\neq 0$，$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵. 再计算 $A_{11}=-1$，$A_{21}=2$，$A_{31}=0$，$A_{12}=0$，$A_{22}=-3$，$A_{32}=3$，$A_{13}=2$，$A_{23}=2$，$A_{33}=-3$. 得 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&-3&3\\2&2&-3\end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&-1&1\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix}$.

例 2.3.3 求解线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=2,\\2x_1+x_2+x_3=-1,\\2x_1+2x_2+x_3=1.\end{cases}$

解 方程组的矩阵形式为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. 由上例知 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$，对 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 两端同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，于是 $\boldsymbol{x} =$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

例 2.3.4 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使之满足矩阵方程 $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C}$.

解 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，则分别用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 左乘、右乘方程两端，有 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AXBB}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$，即 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$.

经计算可得 $\det(\boldsymbol{A}) = 2 \neq 0$，$\det(\boldsymbol{B}) = 1 \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

2.4 初等矩阵与矩阵的初等变换

2.3 节讨论了方阵可逆的充要条件，并给出了利用伴随矩阵求逆矩阵的方法. 利用伴随矩阵计算低阶矩阵的逆是可行的. 但是，若使用这种方法求高阶矩阵的逆矩阵，其计算量是非常大的. 本节给出矩阵的初等变换和初等矩阵概念. 矩阵的初

等变换在求逆矩阵、解线性方程组以及以后要讨论的向量组的线性相关性和向量组的秩等理论中都有重要应用.

2.4.1 矩阵的初等变换

在利用消元法解线性方程组时，一般要对方程组进行三种同解变换：交换两个方程的次序、将某个方程两端同时乘以一个不为零的数、将一个方程两端同时乘以一个数再加到另外一个方程上去. 将对方程组所作的这三种同解变换对应到矩阵上去，就是本节要讨论的矩阵的初等变换.

定义 2.4.1 以下三种变换称为矩阵的**初等行(列)变换**：

1) 交换矩阵两行(列)的位置；

2) 将矩阵某行(列)各个元素同时乘以一个不为零的数；

3) 矩阵某行(列)各个元素同时乘以一个数，再加到另外一行(列)的对应元素上去.

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

为了清楚显示对矩阵所作的初等变换，在变换过程中，常常用记号记录每一次变换.

交换第 i，j 两行的位置记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换第 i，j 两列的位置记作 $c_i \leftrightarrow c_j$；将矩阵第 i 行(列)各个元素同时乘以一个不为零的数 $k \neq 0$，记作 $kr_i(kc_i)$；矩阵的第 j 行(列)各个元素同时乘以一个数 k，再加到第 i 行(列)的对应元素上去，记作 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$.

矩阵等价具有如下性质.

性质 2.4.1 反身性：$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$；

性质 2.4.2 对称性：若 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$；

性质 2.4.3 传递性：若 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$.

例 2.4.1 试经过初等变换把矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 化为单位矩阵.

解
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 + c_1]{c_2 + 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)]{r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}.$$

例 2.4.2 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，证明

$A \to B$.

证 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 - 3c_1 \\ c_4 + 2c_1}]{\substack{r_3 - r_2 \\ c_2 - 2c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 + 5c_2 \\ c_4 - 6c_2}]{c_2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

定理 2.4.1 任意一个 $m \times n$ 矩阵 A 都与一形式为 $F = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 的矩阵等价. 其中矩阵 F 的左上角为一个单位矩阵，其他元素均为 0，称 F 为矩阵 A 的**标准形式**.

2.4.2 初等矩阵

定义 2.4.2 对单位矩阵 E 进行一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**. 与矩阵的三种初等变换对应的有三种初等矩阵.

(1) 互换 E 的 i, j 两行(列)位置，所得初等矩阵

$$E(i, j) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow 第\, i\, 行 \\ \\ \\ \\ \leftarrow 第\, j\, 行 \\ \\ \\ \\ \end{array};$$

(2) 用非零数 k 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行(列)，所得初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i(k))=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow 第\, i\, 行; \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(3) 将 $\boldsymbol{E}$ 的 j 行(i 列)的 k 倍加到 i 行(j 列)上，所得初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,\ j(k))=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 第\, i\, 行 \\ \\ \leftarrow 第\, j\, 行 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

显然，以上三种初等矩阵的行列式为 $\det(\boldsymbol{E}(i,\ j))=-1\neq 0$, $\det(\boldsymbol{E}(i(k)))=k\neq 0$, $\det(\boldsymbol{E}(i,\ j(k)))=1\neq 0$. 于是，初等矩阵都是非奇异矩阵(可逆矩阵)，并且其逆阵分别为$(\boldsymbol{E}(i,\ j))^{-1}=\boldsymbol{E}(j,i)$, $(\boldsymbol{E}\ (i(k)))^{-1}=\boldsymbol{E}\left(i\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)$, $(\boldsymbol{E}(i,\ j(k)))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,\ j(-k))$，它们仍为初等矩阵.

下面讨论初等矩阵与矩阵的初等变换之间的关系.

定理 2.4.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行一次初等行(列)变换，其结果等于对 $\boldsymbol{A}$ 左(右)乘一个相应的 m 阶(n 阶)初等矩阵.

证 在这里仅证明行变换的情况，设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

考虑交换两行的位置：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_1.$$

$$\text{又 } \boldsymbol{E}(i,\ j)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_1.$$

于是有 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{E}(i,\ j)\boldsymbol{A}$. 同理可得 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i \times k} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{1i} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =$

$\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{A}$,并且 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i + kr_j} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}(i,\ j(k))\boldsymbol{A}.$

列变换的情况类似可以证明.

推论 2.4.1 初等变换不改变矩阵的奇异性.

定理 2.4.3 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 和单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 等价,并且存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$.

证 由定理 2.4.1 知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与其标准形等价,即

$$A \to F = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，故 $\boldsymbol{F}$ 也是可逆矩阵，$\det(\boldsymbol{F}) \neq 0$. 于是 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{E}$，同时有 $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{A}$. 由定理 2.4.2 知存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_r, \boldsymbol{P}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{P}_s$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_r\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}_{r+1}\cdots\boldsymbol{P}_s = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$.

定理 2.4.4 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 $m \times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$.

证 设 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$，并且 $\boldsymbol{A}$ 经 s 次初等行变换和 t 次初等列变换化为 $\boldsymbol{B}$，而每进行一次初等行（列）变换相当于 $\boldsymbol{A}$ 左（右）乘一个初等矩阵，于是存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 和 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$，使得 $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{B}$. 现令 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t$，则 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 均为可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$. 反之亦然.

下面给出用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵的方法.

设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$，即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{E}$，于是有

$$\boldsymbol{P}_s^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E},$$

则

$$\boldsymbol{P}_s^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

这表明，可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经若干次初等行变换可以化为 $\boldsymbol{E}$，而 $\boldsymbol{E}$ 经过相同的初等行变换则化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 若将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 并在一起，组成一个 $n \times 2n$ 的矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E})$，对其进行初等行变换，使其左半部分化为 $\boldsymbol{E}$，则右半部分即为 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 这就是用初等变换求逆矩阵的方法. 即

$$(A, E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, B)，\text{则 } B = A^{-1}.$$

例 2.4.3 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 作如下初等行变换

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1+2r_2\\ r_3-3r_2}]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & \vdots & 0 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -4 & \vdots & 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3\times\left(-\frac{1}{4}\right)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & \vdots & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+3r_3]{r_1-5r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4}\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4}\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix},$$

于是$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

例 2.4.4 设$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$为从$\boldsymbol{x}$到$\boldsymbol{y}$的线性变换,变换矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$,求从$\boldsymbol{y}$到$\boldsymbol{x}$的线性变换.

解 由例 2.4.3 知变换矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$是可逆的,并且$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$,于是从$\boldsymbol{y}$到$\boldsymbol{x}$的线性变换为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$,即从$\boldsymbol{y}$到$\boldsymbol{x}$的线性变换为

$$\begin{cases}x_1=\frac{5}{4}y_1+\frac{1}{4}y_2-\frac{7}{4}y_3,\\ x_2=-\frac{3}{4}y_1+\frac{1}{4}y_2+\frac{5}{4}y_3,\\ x_3=-\frac{1}{4}y_1-\frac{1}{4}y_2+\frac{3}{4}y_3.\end{cases}$$

下面考虑应用矩阵的初等变换的方法求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{B}$,若系数矩阵是可逆的,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$. 那么 $\boldsymbol{P}_s^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}$, 这表明,系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经若干次初等行变换可以化为 $\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{B}$ 经过相同的初等行变换则化为 $\boldsymbol{x}$.

例 2.4.5 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=2, \\ 2x_1+x_2+x_3=-1, \\ 2x_1+2x_2+x_3=1. \end{cases}$

解 将方程组写为矩阵形式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的,为使 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$, 作如下初等行变换:

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&2&2\\2&1&1&-1\\2&2&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&-3&-3&-5\\0&1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&1&0&2\\0&-3&-3&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&1&0&2\\0&0&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-2r_3]{\substack{r_1-2r_2\\ -\frac{1}{3}r_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{4}{3}\\0&1&0&2\\0&0&1&-\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

于是可得,方程组的解为 $\begin{cases} x_1=-\dfrac{4}{3}, \\ x_2=2, \\ x_3=-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

与例 2.4.5 类似,可以利用矩阵初等行变换的方法求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{X}$ 均为矩阵.

例 2.4.6 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&3\\4&3&2\\1&-2&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\3&1\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{X}$,使得方程 $2\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{BX}+\boldsymbol{C}$ 成立.

解 由 $2\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{BX}+\boldsymbol{C}$ 可得 $(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}$,于是 $\boldsymbol{X}=(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}$, 作如下初等行变换

$$(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&3&1&2\\0&-1&-2&2&1\\1&0&2&3&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&3&1&2\\0&-1&-2&2&1\\0&-1&-1&2&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&1&3&3\\0&-1&-2&2&1\\0&0&1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+2r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&5\\0&-1&0&2&-3\\0&0&1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&5\\0&1&0&-2&3\\0&0&1&0&-2\end{array}\right).$$

由此得 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&5\\-2&3\\0&-2\end{pmatrix}$.

现在请读者考虑,若要求解形如 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 的矩阵方程,又该如何计算?

2.5 矩阵的秩

矩阵的秩是一个重要概念,在研究线性方程组解的情况及向量组的线性相关性方面有着重要应用. 为了给出矩阵秩的定义,首先给出矩阵的子式的概念.

定义 2.5.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,在 $\boldsymbol{A}$ 中任取 k 行 k 列($k\leqslant\min\{m, n\}$),位于这些行列交叉位置上的 k^2 个元素,按它们在矩阵中的位置顺序构成的 k 阶行列式称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶**子式**.

显然,$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式共有 $C_m^kC_n^k$ 个.

定义 2.5.2 若 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式 $D_r\neq 0$,而 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式(如果有的话)均为零,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**为 r,记作 $R(\boldsymbol{A})=r$.

规定零矩阵的秩为零.

由矩阵秩的定义不难看出,矩阵的秩具有如下性质.

性质 2.5.1 $0\leqslant R(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant\min\{m, n\}$;

性质 2.5.2 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$;

性质 2.5.3 若 $R(\boldsymbol{A})=r$,则 $\boldsymbol{A}$ 的所有阶数大于 r 的子式(如果有的话)均为零. 即若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,则不等于零的最高阶子式的阶数为 r.

例 2.5.1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$.

解 首先容易看出 $\boldsymbol{A}$ 有一个 2 阶子式 $D_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3\neq 0$,而 $\boldsymbol{A}$ 的 3 阶子式

(最高阶)只有一个为 $\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$,因此 $R(\boldsymbol{A}) = 2$.

用定义求矩阵的秩往往需要进行大量的行列式计算,这给计算带来很多不便.但对于一些特殊矩阵,有时可以很方便地观察到其秩的情况.

例如,矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,不难看出 $\boldsymbol{A}$ 的所有 4 阶子式均为零,而有一个 3 阶子式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$,因此,$R(\boldsymbol{A}) = 3$.

定义 2.5.3 若矩阵的每一行中的第一个非零元素的下方及左下方的元素均为零,并且元素全为零的行全部位于非零行的下方,则称该矩阵为**阶梯形矩阵**.

特殊地,对于一个阶梯形矩阵,若非零行中的第一个非零元素都为 1,且它所在列中的其余元素均为 0,则称该矩阵为**行最简形矩阵**.

例 2.5.2 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,试通过初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵.

解 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}$ 为阶梯形矩阵.

进一步,对继续进行初等行变换有

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}r_3]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - 2r_3]{r_1 - r_3}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{U}$,则 $\boldsymbol{U}$ 为行最简形矩阵.

显然,**阶梯形矩阵的秩等于其非零行的行数.**

定理 2.5.1 矩阵经初等变换其秩不变,即若 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$,则 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

证明 设 $R(\boldsymbol{A}) = r$,且 $D_r \neq 0$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶(r 阶)非零子式.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $r_i \times k$ 化为 $\boldsymbol{B}$，由行列式的性质，在 $\boldsymbol{B}$ 中容易找到一个相应的 r 阶子式 $D_1 \neq 0$，于是 $R(\boldsymbol{B}) \geqslant r$.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换 $r_i + kr_j$ 化为 $\boldsymbol{B}$，如果 D_r 中不含第 i 行或同时含有第 i 行与第 j 行，则有 $D_1 = D_r \neq 0$，于是 $R(\boldsymbol{B}) \geqslant r$. 如果 D_r 中含第 i 行但不含第 j 行，考虑

$$D_1 = \begin{vmatrix} \vdots \\ a_i + ka_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{vmatrix} = D_r + k\hat{D}_r.$$

若 $\hat{D}_r = 0$，则有 $D_1 = D_r \neq 0$，于是 $R(\boldsymbol{B}) \geqslant r$. 若 $\hat{D}_r \neq 0$，此时，可知 A 中有一个不含第 i 行的 r 阶非零子式 $\hat{D}_r$，再结合前面的法可得 $R(\boldsymbol{B}) \geqslant r$.

综上所述，A 经过一次初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$，则有 $R(\boldsymbol{B}) \geqslant R(\boldsymbol{A})$. 显然，$\boldsymbol{B}$ 也可经过一次初等行变换化为 $\boldsymbol{A}$，则有 $R(\boldsymbol{A}) \geqslant R(\boldsymbol{B})$，故 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$. 对于列变换类似地，可得同样的结论. 因此，$\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

推论 2.5.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶可逆方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则 $R(\boldsymbol{AB}) = R(\boldsymbol{B})$.

由定理 2.5.1，可以通过初等变换求矩阵的秩：对矩阵进行初等变换，将其化为阶梯形，所得阶梯形矩阵中非零行的行数即为所求矩阵的秩.

例 2.5.3 求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩，并求 $\boldsymbol{A}$ 的一个不等于零的最高阶子式.

解 对 $\boldsymbol{A}$ 实施初等行变换，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

于是 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 3$.

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$，因此，$\boldsymbol{A}$ 中最高阶（3 阶）非零子式所在的列与 $\boldsymbol{B}$ 中最高阶（3 阶）非零子式所在的列（第 1，2，5 列）相同. 于是，求 $\boldsymbol{A}$ 的一个不等于零的最高阶子式只需在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1，2，5 列中找到即可，不难得到子式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的一个不等于零最高阶子式.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $R(\boldsymbol{A})=n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**满秩矩阵**.

显然，$\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

2.6 矩阵的分块

在处理行数、列数较大的矩阵时，常用一些贯穿矩阵的纵线和横线将矩阵分成若干部分，每一部分构成一个小的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，这样矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以视为是由这些子块构成的矩阵. 这种处理方法称为矩阵的分块方法.

例如，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{pmatrix}$，可以根据不同需要对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行不同的分块.

例如，$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:c}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\\hdashline a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{array}\right)$. 对于这种分块方法，令 $\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix}a_{33}\\a_{43}\end{pmatrix}$，称 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**子块**，$i,j\in\{1,2\}$. 那么，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可写成以子块为“元素”的表示形式 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$. 用矩阵的子块表示矩阵的方法称为矩阵分块法. 同时，以子块为“元素”的矩阵称为**分块矩阵**.

对 $\boldsymbol{A}$ 还可以根据需要做其他的分块方法，如 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:cc}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\\hdashline a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{array}\right)$，或 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\\hdashline a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{array}\right)$. 对于 $\boldsymbol{A}$ 的后两种分法，可以类似写出其分块矩阵，此处不再赘述.

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则类似,对矩阵进行分块的原则是使计算尽可能简便易行,但在分块矩阵的分块及运算过程中必须遵守相应的运算规则.

1. 分块矩阵的加法

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 采用完全相同的分块方式,如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 也均为同型矩阵,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}.$$

2. 数乘分块矩阵

设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$, k 为数,则 $k\boldsymbol{A}=k\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}k\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ k\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$.

3. 分块矩阵乘法

在对分块矩阵进行乘法运算时,不仅要求 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数,且还要求 $\boldsymbol{A}$ 关于列的分块方式与 $\boldsymbol{B}$ 关于行的分块方式完全一致,使得左边分块矩阵的列数与右边分块矩阵的行数相同.

例如,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rt}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{A}_{i1}$, $\boldsymbol{A}_{i2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{A}_{ir}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j}$, $\boldsymbol{B}_{2j}$, $\cdots$, $\boldsymbol{B}_{rj}$ 的行数,则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{st}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{C}_{ij}=$
$\sum\limits_{k=1}^{r}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}\,(i=1,\,2,\,\cdots,\,s;\ j=1,\,2,\,\cdots,\,t)$.

例 2.6.1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&2&-1&0\\2&-1&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\2&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}$，利用分块矩阵，计算 $\boldsymbol{AB}$.

解 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 进行分块

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hdashline 1&2&-1&0\\2&-1&0&-1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{A}_{21}&-\boldsymbol{E}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:c}1&0&1\\2&1&0\\\hdashline 2&1&0\\1&2&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

于是，$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}-\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\3&1&1\\-1&-3&2\end{pmatrix}$.

4. 分块矩阵的转置

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1r}\\\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}}&\cdots&\boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}}&\cdots&\boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

5. 对角分块方阵

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可作如下分块：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&&&\\&\boldsymbol{A}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_r\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只有主对角线上有非零子块，而且子块 $\boldsymbol{A}_k\,(k=1,2,\cdots,r)$ 都是方阵，其余子块均为零矩阵，此时称为对角分块方阵.

对角分块方阵具有以下性质.

1) 对角分块方阵的行列式等于对角线上各子块行列式之积，即

$$\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1&&&\\&\boldsymbol{A}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_r\end{vmatrix}=\det(\boldsymbol{A}_1)\det(\boldsymbol{A}_2)\cdots\det(\boldsymbol{A}_r);$$

2) 若各子块 $\boldsymbol{A}_k$ 都是可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 也可逆，并且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r^{-1} \end{pmatrix}.$$

对角分块矩阵的以上两个性质的证明是容易的,在此从略.

例 2.6.2 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\det(A)$ 及 A^{-1}.

解 对 A 作如下分块

$$A = \left(\begin{array}{cc:cc} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

即令 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$,其中 $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 A 为对角分块矩阵,容易计算 $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $\det(A_2) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$, 并且 $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

于是 $\det(A) = \det(A_1)\det(A_2) = -15$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

习 题 2

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,试计算 $A+B$, $A-B$, $2A-$

$3B$, AB^{T}, BA^{T}.

2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$,试求矩阵 X,使得等式 $2A-3X+B=O$ 成立.

3. 已知两个线性变换 $\begin{cases}x_1=3y_1 - y_3,\\ x_2=y_1+2y_2-2y_3,\\ x_3=y_2+3y_3,\end{cases}$ $\begin{cases}y_1=2z_1-3z_2,\\ y_2=z_1+2z_3,\\ y_3=-z_2+3z_3,\end{cases}$ 求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

4. 计算下列矩阵的乘积:

(1) $\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ -3 & 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 1\end{bmatrix}(3,2,3)$; (3) $(3,2,3)\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$;

(4) $(x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$,证明 $A^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}$,其中 k 为自然数.

6. 试指出下列矩阵中哪些是可逆的,若可逆,求其逆矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix};\quad D=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

7. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$; (5) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$; (6) $\begin{bmatrix}a_1 & & & 0\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\end{bmatrix}$ $(a_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n)$.

8. 已知线性变换: $\begin{cases}x_1=2y_1+2y_2+y_3,\\ x_2=3y_1+y_2+5y_3,\\ x_3=3y_1+2y_2+3y_3,\end{cases}$ 用矩阵表示从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

9. 解线性方程组

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-1, \\ 3x_1+2x_2=2, \\ 2x_1+x_2-2x_3=5. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_2-x_3-x_4=3, \\ x_1+x_2+2x_4=4, \\ -2x_1+2x_2-x_3+2x_4=5, \\ x_1-x_2+2x_3+5x_4=0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2=1, \\ x_1+x_2+2x_3=0, \\ x_2+x_3+2x_4=0, \\ x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_4+x_5=1. \end{cases}$

10. 解下列矩阵方程

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$； (2) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

11. 设 a，b，c，$d\neq 0$，利用分块矩阵求下列矩阵的逆.

$$(1)\ \boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{array}\right),\quad (2)\ \boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ \hdashline 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right).$$

12. 分别求下列矩阵的秩，并求其一个最高阶非零子式.

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$； (2) $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

13. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ x_2+x_3-4x_4=1, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=4, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6. \end{cases}$ 试求该线性方程组的系数矩阵 A 的秩 $R(A)$ 和增广矩阵 $B=(A,b)$ 的秩 $R(B)$.

习 题 答 案

习 题 1

1. (1) $4ab$, (2) 1, (3) -1, (4) 5, (5) $(c-a)(c-b)(b-a)$, (6) $-2(x^3+y^3)$.

2. (1) 0, (2) 6, (3) 5, (4) 3, (5) $\dfrac{n(n-1)}{2}$, (6) $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. $a_{11}a_{25}a_{32}a_{44}a_{53}$, $-a_{11}a_{24}a_{32}a_{45}a_{53}$.

4. 2.

5. (1) -160, (2) 6, (3) 2, (4) 0, (5) $4abcdef$, (6) $\left(a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{c_ib_i}{a_i}\right)\prod\limits_{i=2}^{n}a_i$.

   (7) $(a_{11}a_{44}-a_{14}a_{41})(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$

6. $\dfrac{x}{2}$.

7. (1) $(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$, (2) $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$.

8. 略.

9. 略.

10. $x=\pm 2$.

11. (1) $x_1=-\dfrac{4}{3}$, $x_2=2$, $x_3=-\dfrac{1}{3}$;

    (2) $x_1=3$, $x_2=-1$, $x_3=-1$, $x_4=1$, $x_5=0$;

    (3) $k\neq\dfrac{5\pm 3\sqrt{5}}{2}$, $x_1=-\dfrac{k+2}{k^2-5k-5}$, $x_2=\dfrac{k-1}{k^2-5k-5}$, $x_3=\dfrac{k^2-2k-2}{k^2-5k-5}$.

习 题 2

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 5\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-8 & -3 & 11\\ -5 & -4 & 7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=$ $\begin{pmatrix}-6 & 1\\ 0 & 13\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 1 & 13\end{pmatrix}$.

2. $\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}8 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 7\end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 = 6z_1 - 8z_2 - 3z_3, \\ x_2 = 4z_1 - z_2 - 2z_3, \\ x_3 = z_1 - 3z_2 + 11z_3. \end{cases}$

4. (1) $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -17 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, (3) 15,

(4) $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$.

5. 略.

6. $\boldsymbol{A}$不可逆,$\boldsymbol{B}$可逆, $B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & -10 \end{pmatrix}$;$\boldsymbol{C}$不可逆;$\boldsymbol{D}$可逆,$\boldsymbol{D}^{-1} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 8 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$.

7. (1) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, (3) $\frac{1}{18}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & -4 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$,

(4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, (5) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, (6) $\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$.

8. $\begin{cases} y_1 = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3 \\ y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3 \\ y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{cases}$.

9. (1) $x_1 = -\frac{12}{5}$, $x_2 = \frac{23}{5}$, $x_3 = -\frac{13}{5}$.

(2) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = -\frac{11}{3}$, $x_4 = \frac{4}{3}$.

(3) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$.

10. (1) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} -3 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 6 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

11. (1) $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$, (2) $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{d} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{c}{d} \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$.

12. (1) $R(\boldsymbol{A})=3$, $\boldsymbol{D}_3=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\4&1&3\end{vmatrix}$; (2) $R(\boldsymbol{B})=3$, $\boldsymbol{D}_3=\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&1&1\\-1&2&-2\end{vmatrix}$.

13. $R(\boldsymbol{A})=3$, $R(\boldsymbol{B})=4$.

习 题 3

1. (1) $(23, 18, 17)^{\mathrm{T}}$, (2) $(12, 12, 11)^{\mathrm{T}}$.

2. (1) $(-4, 0, -5, -9)^{\mathrm{T}}$, (2) $\left(7, -5, \frac{11}{2}, \frac{27}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

3. $\boldsymbol{\xi}=(1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$.

4. (1) $\boldsymbol{\beta}=-11\boldsymbol{\alpha}_1+14\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$,

   (2) $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+5\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$.

5. $\boldsymbol{\gamma}_1=4\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-17\boldsymbol{\alpha}_3$,

   $\boldsymbol{\gamma}_2=23\boldsymbol{\alpha}_2-7\boldsymbol{\alpha}_3$.

6. $\boldsymbol{\gamma}_1=(k_{11}l_{11}+k_{12}l_{21}+k_{13}l_{31})\boldsymbol{\alpha}_1+(k_{11}l_{12}+k_{12}l_{22}+k_{13}l_{32})\boldsymbol{\alpha}_2$,

   $\boldsymbol{\gamma}_2=(k_{21}l_{11}+k_{22}l_{21}+k_{23}l_{31})\boldsymbol{\alpha}_1+(k_{21}l_{12}+k_{22}l_{22}+k_{23}l_{32})\boldsymbol{\alpha}_2$.

7. $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2,\\ \boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_3,\\ \boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_3.\end{cases}$

8. (1) 线性无关,(2) 线性无关.

9. 略.

10. (1) $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$,

    (2) $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3$.

11. (1) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{7}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$;

    (2) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_5=-2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

12. $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=-29$, $(3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}, 3\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta})=102$,

    $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{30}$, $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|=\sqrt{14}$, $\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|=\sqrt{130}$.

13. 略.

14. $k=9$.

15. 略.

16. $\frac{1}{\sqrt{26}}(4, 0, 1, -3)^{\mathrm{T}}$.

17. (1) 是. (2) $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{30}$, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=3\sqrt{2}$.