目　录

前　言

第 1 章　行列式 …… 1

1.1　行列式的概念 …… 1

1.1.1　二阶与三阶行列式 …… 1

1.1.2　全排列及其逆序数 …… 3

1.1.3　n 阶行列式的定义 …… 4

1.2　行列式的性质 …… 8

1.3　行列式的展开式 …… 14

1.3.1　余子式与代数余子式的概念 …… 14

1.3.2　行列式的按行(列)展开法则 …… 14

1.4　克拉默法则 …… 19

习题 1 …… 21

第 2 章　矩阵及其运算 …… 25

2.1　矩阵的基本概念 …… 25

2.2　矩阵的运算 …… 27

2.2.1　矩阵的加法 …… 27

2.2.2　数与矩阵的乘法 …… 27

2.2.3　矩阵的乘法 …… 28

2.2.4　矩阵的转置 …… 32

2.2.5　方阵的行列式 …… 33

2.2.6　共轭矩阵 …… 35

2.3　矩阵的逆 …… 36

2.4　初等矩阵与矩阵的初等变换 …… 38

2.4.1 矩阵的初等变换 …… 39
2.4.2 初等矩阵 …… 40
2.5 矩阵的秩 …… 46
2.6 矩阵的分块 …… 49
习题 2 …… 52

第 3 章 n 维向量 …… 55
3.1 n 维向量及其运算 …… 55
3.1.1 n 维向量的概念 …… 55
3.1.2 向量的运算 …… 56
3.2 向量组及其线性相关性 …… 57
3.2.1 向量组的线性组合 …… 57
3.2.2 向量组的线性相关性 …… 60
3.3 向量组的秩 …… 66
3.4 向量空间的概念 …… 69
3.5 $\mathbf{R}^n$ 的内积和标准正交基 …… 71
习题 3 …… 77

第 4 章 线性方程组 …… 80
4.1 解线性方程组的消元法 …… 80
4.1.1 非齐次线性方程组的解法 …… 82
4.1.2 齐次线性方程组的解法 …… 89
4.2 齐次线性方程组解的结构 …… 91
4.3 非齐次线性方程组解的结构 …… 96
习题 4 …… 99

第 5 章 矩阵的特征值与特征向量 …… 102
5.1 特征值与特征向量 …… 102
5.2 相似矩阵 …… 106
5.3 实对称矩阵的对角化 …… 110
习题 5 …… 117

第 6 章　二次型 ······ 118
6.1　二次型及其矩阵表示　合同矩阵 ······ 118
6.2　化二次型为标准形 ······ 120
6.2.1　正交变换的方法 ······ 121
6.2.2　配方法* ······ 123
6.2.3　初等变换法* ······ 127
6.3　惯性定理和正定二次型 ······ 130
6.3.1　惯性定理 ······ 130
6.3.2　正定二次型 ······ 132
6.3.3　其他有定二次型* ······ 137
习题 6 ······ 138

第 7 章　线性空间与线性变换* ······ 139
7.1　线性空间的定义与性质 ······ 139
7.2　基　维数　坐标 ······ 141
7.3　基变换与坐标变换 ······ 143
7.4　线性变换及其矩阵表示 ······ 146
习题 7 ······ 151

习题答案 ······ 153

第 1 章 行 列 式

行列式是线性代数中最基本的内容之一，在矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性等问题中有着广泛的应用，也是科学研究的重要工具.

在初等数学和高等数学的学习中对行列式已经有过接触. 在那里，应用行列式解决了一些问题，但并未对其进行系统研究. 本章我们系统学习行列式的概念、性质、计算及应用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1 行列式的概念

1.1.1 二阶与三阶行列式

考虑二元线性方程组的求解，用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组的解可用公式表示为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)中 x_1 和 x_2 的分母都是 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，其中的 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 为方程组中未知数 x_1 和 x_2 的系数. 若将这些系数按其在方程组中的位置构成一个二行二列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

那么分母就是从左上角到右下角的连线上的两个数 a_{11} 与 a_{22} 的积，减去从右上角到左下角连线上的两个数 a_{12} 与 a_{21} 的积所得的差，这就是一个二阶行列式.

定义 1.1.1 将 2×2 个数 a_{ij} $(i, j=1, 2)$ 排成一个 2 行 2 列的数表，用其表示算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

则称上式为一个**二阶行列式**. 组成行列式的数 a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2)$ 称为行列式的**元素**，$i,\ j$ 分别为 a_{ij} 所在的行和列，它们分别称为 a_{ij} 的**行标**和**列标**.

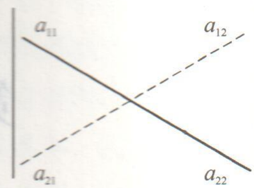

图 1.1.1

如图 1.1.1 所示，行列式中从左上角到右下角的连线(实线)称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角连线(虚线)称为行列式的**副对角线**. 这样，二阶行列式的值即为主对角线上元素之积与副对角线上元素之积的差.

按照这种算法，式(1.1.2)中 x_1 和 x_2 的分子也可以用二阶行列式表示：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，当 $D\neq 0$ 时，方程组的求解公式(1.1.2)可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

其中分母 D 为未知数的系数按其在方程组中的位置构成的行列式，该行列式称为方程组的**系数行列式**；x_1 的分子 D_1 可以看成将系数行列式 D 中的第一列元素 a_{11} 和 a_{21}(x_1 的系数)用常数项 b_1 和 b_2 替换所得的行列式；x_2 的分子 D_2 为将系数行列式 D 中的第二列元素 a_{12} 和 a_{22}(x_2 的系数)用常数项 b_1 和 b_2 替换所得到的行列式.

例 1.1.1 解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2=12, \\ x_1+4x_2=1. \end{cases}$$

解 首先，系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=2\times 4-(-3)\times 1=11\neq 0$，再计算 $D_1=\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=12\times 4-(-3)\times 1=51$，$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\times 1-12\times 1=-10$.

于是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{51}{11}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{10}{11}.$$

与二阶行列式类似，可以定义三阶行列式.

定义 1.1.2 将 3×3 个数 a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ 排成 3 行 3 列的数表，用其表示

算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

则称上式为一个**三阶行列式**.

从定义 1.1.2 可以看出,三阶行列式所表示的算式中含有 6(=3!)项,其中每一项都是位于行列式中不同行不同列的 3 个元素之积再冠以正号或负号.

三阶行列式的计算规律有如下的对角线法则:如图 1.1.2 所示,图中三条实线看作平行于主对角线的连线,虚线看作平行于副对角线的连线,位于实线上三个元素的积冠以正号,位于虚线上三个元素的积冠以负号,计算其代数和即为三阶行列式的值.

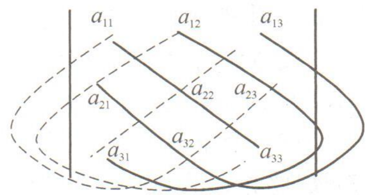

图 1.1.2

例 1.1.2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$D = 2\times 0\times(-2) + 1\times 2\times(-3) + 3\times(-1)\times 5 - 3\times 0\times(-3) - 1\times(-1)\times(-2) - 2\times 2\times 5 = -43.$$

1.1.2 全排列及其逆序数

二阶和三阶行列式都可以用对角线法则计算,但是,对于四阶及四阶以上的高阶行列式,则对角线法则不再成立. 为了准确定义 n 阶行列式,需要给出全排列及其逆序数的概念.

在数学上,将 n 个不同的元素排成一列,称为这 n 个元素的全排列,简称排列. n 个不同元素的所有排列的种数常用 $P_n = n!$ 表示. 例如,1, 2, 3 三个数的全排列有:123, 132, 213, 231, 312, 321,共 6 种,即 $P_3 = 1\times 2\times 3 = 3! = 6$.

在 n 个不同的元素的排列中,事先规定元素之间的一个标准顺序. 例如,对 1~n 这 n 个自然数,一般把从小到大的顺序规定为标准顺序. 若一个排列的各个元素之间都是按标准顺序排列的,则称该排列为**标准排列**. 若一个排列中的某两个元素的先后顺序与标准顺序不同,则称该二元素构成 1 个**逆序**. 一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**. 当一个排列的逆序数为奇数时,称该排列为**奇排列**,当一个排列的逆序数为偶数时,称该排列为**偶排列**.

这里给出计算排列逆序数的一个有效方法,设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 1~n 这 n 个自然数

的一个全排列，若元素 p_i 前面有 t_i 个比它大的数，就说 p_i 这个元素的逆序数为 t_i. 从左到右，n 个数所有逆序数之和 $t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$ 即为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

例 1.1.3 分别求排列 2431，3214 和 4132 的逆序数.

解 对于排列 2431，从左到右依次考虑 2，4，3，1 的逆序数：2 排在首位，前面没有比它大的数，故其逆序数为 0；4 是最大的数，其逆序数为 0；3 的前面有一个大于 3 的数(4)，故其逆序数为 1；1 的前面有 3 个大于 1 的数(2,4,3)，故其逆序数为 3. 因此排列 2431 的逆序数为 $t=0+0+1+3=4$，该排列为偶排列.

类似地，容易计算排列 3214 的逆序数为 $t=0+1+2+0=3$，为奇排列；排列 4132 的逆序数为 $t=0+1+1+2=4$，为偶排列.

在一个排列中，将某两个元素的位置互换，其余元素不动，称对排列做了一次**对换**. 将相邻的两个元素进行对换称为**相邻对换**.

定理 1.1.1 对排列做一次对换，则排列的奇偶性发生改变.

证 首先考虑相邻对换的情况.

设排列为 $p_1p_2\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$，对换 p_i 和 p_{i+1}，排列变为 $p_1p_2\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$. 显然，经过这样的对换，$p_1$，$p_2$，$\cdots$，$p_{i-1}$ 及 p_{i+2}，$\cdots$，p_n 的逆序数都不会有改变，只有 p_i 和 p_{i+1} 的逆序数可能发生改变：若 $p_i>p_{i+1}$，对换后 p_i 的逆序数不变，p_{i+1} 的逆序数减少 1；若 $p_i<p_{i+1}$，对换后 p_i 的逆序数增加 1，p_{i+1} 的逆序数不变. 故经相邻对换排列的奇偶性改变了.

然后考虑一般对换的情况.

设排列为 $p_1p_2\cdots p_ip_{i+1}\cdots p_{i+k}p_j\cdots p_n$，对换 p_i 和 p_j，排列变为 $p_1p_2\cdots p_jp_{i+1}\cdots p_{i+k}p_i\cdots p_n$. 为了观察其逆序数的变化情况，将这样的对换分为两步进行.

(1) 先将 p_i 与其后面 k 个数 p_{i+1}，$\cdots$，p_{i+k} 逐次做 k 次相邻对换，将排列化为 $p_1p_2\cdots p_{i+1}\cdots p_{i+k}p_ip_j\cdots p_n$，这样奇偶性改变了 k 次；

(2) 再将 p_j 与其前面 $k+1$ 个数 p_{i+1}，$\cdots$，p_{i+k}，p_i 逐次做 $k+1$ 次相邻对换，这样，就将排列化为 $p_1p_2\cdots p_jp_{i+1}\cdots p_{i+k}p_i\cdots p_n$，如此，排列的奇偶性又改变了 $k+1$ 次. 从排列 $p_1p_2\cdots p_ip_{i+1}\cdots p_{i+k}p_j\cdots p_n$ 化为 $p_1p_2\cdots p_jp_{i+1}\cdots p_{i+k}p_i\cdots p_n$，共进行了 $2k+1$ 次相邻对换，其奇偶性改变了 $2k+1$ 次，故奇偶性发生了改变.

利用定理 1.1.1 不难得到如下结论.

推论 1.1.1 将奇排列变成标准排列需要做奇数次对换，将偶排列变成标准排列需要做偶数次对换.

1.1.3 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，下面再次分析三阶行列式的定义.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

计算三阶行列式的算式中共有 3! =6 项，其中每一项都是行列式中位于不同行、不同列的三个元素的乘积，若不考虑前面的正负号，将其行标按标准顺序 123 排列，则各项可写为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其中列标 $p_1p_2p_3$ 恰是 1，2，3 这三个数的 6 种排列. 仔细分析不难发现，前面冠以正号的三项对应列标的排列分别为 123，231，312，它们全是偶排列；前面冠以负号的三项对应列标的排列分别为 321，213，132，它们全是奇排列. 因此，三阶行列式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为列标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数.

不失一般性，下面给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1.3 设有 $n\times n$ 个数 a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 排成 n 行 n 列的数表，用其表示算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

称上式为 ***n* 阶行列式**，有时简记为 $\det(a_{ij})$. 其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数的全排列，t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数. 组成行列式的数 a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 称为行列式的**元素**.

n 阶行列式表示一个算式，为 $n!$ 项的代数和，每一项均为行列式中位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积，各项前冠以符号 $(-1)^t$，其中 t 为将每一项的 n 个元素的行标按标准顺序排列，其列标排列的逆序数.

当 $n=2,\ 3$ 时，这里定义的二、三阶行列式与前面用对角线法则定义的二、三阶行列式是一致的. 特殊地，当 $n=1$ 时，为一阶行列式 $|a|=a$. 需要注意的是，一阶的行列式记号不要与绝对值符号相混淆.

事实上，n 阶行列式的每一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的行标排列定为 $12\cdots n$ 是前 n 个自然数的标准排列，列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 为前 n 个自然数的一个排列，t 为列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数. 如果对 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中的元素做对换，将列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 化为标准排列 $12\cdots n$，同时行标排列则由标准排列 $12\cdots n$ 化为了 $q_1q_2\cdots q_n$，设这样对换次数为 r. 根据推论 1.1.1，r 的奇偶性与 t 相同，而排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 是

由标准排列 $12\cdots n$ 经过 r 次对换得到的，设其逆序数为 s，则 s 的奇偶性也与 t 相同. 于是 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$. 这样，可以得到 n 阶行列式的另一种定义方式.

定理 1.1.2 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 s 为当列标按标准排列时行标排列的逆序数，t 为当行标按标准排列时列标排列的逆序数.

以三阶行列式为例，直观上分析定理 1.1.2 的结论：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}&=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\\
&=(-1)^0a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^2a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^2a_{13}a_{21}a_{32}\\
&\quad+(-1)^3a_{13}a_{22}a_{31}+(-1)^1a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^1a_{11}a_{23}a_{32}\\
&=(-1)^0a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^2a_{31}a_{12}a_{23}+(-1)^2a_{21}a_{32}a_{13}\\
&\quad+(-1)^3a_{31}a_{22}a_{13}+(-1)^1a_{21}a_{12}a_{33}+(-1)^1a_{11}a_{32}a_{23}\\
&=\sum_{q_1q_2q_3}(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}a_{q_3 3}.\end{aligned}$$

下面给出几个特殊的行列式.

(1) 若行列式中主对角线以上的元素全为零，即当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，则称该行列式为**下三角行列式**：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) 若行列式中主对角线以下的元素全为零,即当 $i>j$ 时, $a_{ij}=0$,则称该行列式为**上三角行列式**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(3) 若行列式中除主对角线以外的元素全为零,即当 $i\neq j$ 时, $a_{ij}=0$,则称该行列式为**对角行列式**,简记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1.1.4 证明下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由行列式的定义可得: $D=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,由于当 $i<j$ 时, $a_{ij}=0$,因此 D 中可能不为零的元素 a_{ij} 的行标和列标应满足 $i\geqslant j$,即需要 $1\geqslant p_1=1$;对于 p_2,应有 $2\geqslant p_2$,且 $p_2\neq p_1=1$,故 $p_2=2$;…; $n\geqslant p_n=n$. 因此, D 中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 可能不为零,其余各项均为零,于是 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

类似地,容易证明下列结论.

上三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}; \tag{1.1.3}$$

对角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

并且

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1};$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

以上几个特殊行列式的计算公式比较简单，且便于记忆. 因此，在计算行列式的过程中经常用到，希望读者掌握.

1.2 行列式的性质

若用行列式的定义计算行列式的值往往是很复杂的，在通常情况下，计算一个行列式是根据行列式的性质对其进行适当的变换，将其变成一个特殊的行列式（如对角行列式或上、下三角行列式），再求行列式的值. 为此，本节讨论行列式的性质.

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'，即若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，则 D 的转置行列式 D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. 显$$

然$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = D$.

性质 1.2.1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

证 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 记 D 的转置行列式为 $D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$,其中 $b_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$,根据 n 阶行列式的定义,$D^{\mathrm{T}} = \sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} = \sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$,由定理 1.1.2,$D = \sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$, 所以 $D = D^{\mathrm{T}}$.

由定理 1.1.2 与性质 1.2.1 不难看出,行列式的行和列具有同等的地位,所以行列式中对行成立的性质对列也一样成立.

性质 1.2.2 互换行列式的两行(列),行列式变号,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -D_1.$$

证 设 $i < j$, 行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ik} = a_{jk}$, $b_{jk} = a_{ik}(k = 1, 2, \cdots, n)$;当 $l \neq i, j$ 时,$b_{lk} = a_{lk}(k = 1, 2, \cdots, n)$. 根据行列式的定义,

$$\begin{aligned}D_1 &= \sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n}(-1)^s b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}\\&= \sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n}(-1)^s a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}\\&= \sum_{p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n}(-1)^t(-1)a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}\\&= (-1)\sum_{p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}\\&= -D.\end{aligned}$$

上式中，s，t 分别表示排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 和 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数.

推论 1.2.1 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

性质 1.2.3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

性质 1.2.3 可直接用定义证明，从略.

推论 1.2.2 行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 1.2.4 行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式为零.

证 由性质 1.2.3 及推论 1.2.1 可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = 0.$$

性质 1.2.5 行列式具有按行(列)可加性，即，设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (a_{i1}+a'_{i1}) & (a_{i2}+a'_{i2}) & \cdots & (a_{in}+a'_{in})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D=D_1+D_2$.

证 由行列式的定义,可得

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1}\cdots(a_{ip_i}+a'_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} + \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1}\cdots a'_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= D_1+D_2. \end{aligned}$$

性质 1.2.6 把行列式的某一行(列)的各个元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.用公式表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{j1}+ka_{i1}) & (a_{j2}+ka_{i2}) & \cdots & (a_{jn}+ka_{in}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.2.6 可由性质 1.2.4 与性质 1.2.5 证明,从略.

在进行行列式计算时,一般是应用行列式的性质对行列式作恒等变换,把行列式化为上(下)三角行列式,或对角行列式,再运用特殊行列式的计算公式求得行列式的值.为了清楚地表明变换过程,常用如下的记号表示所作的变换:用 r_i 表示行列式的第 i 行,用 c_j 表示行列式的第 j 列.即用 $r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$ 表示交换第 i 行(列)与第 j 行(列);用 kr_i (kc_i) 表示第 i 行(列)的所有元素同时乘以数 k;用 r_i+kr_j (c_i+kc_j) 表示第 j 行(列)的所有元素乘以 k 加到第 i 行(列)的对应元素上.

例 1.2.1 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-2r_1]{r_3-3r_1}\begin{vmatrix}1&1&4&3\\0&2&-3&2\\0&-1&-13&-10\\0&-1&-7&-4\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&1&4&3\\0&-1&-13&-10\\0&2&-3&2\\0&-1&-7&-4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_2]{r_3+2r_2}\begin{vmatrix}1&1&4&3\\0&-1&-13&-10\\0&0&-29&-18\\0&0&6&6\end{vmatrix}\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_4]{r_4\times\frac{1}{6}}(-6)\begin{vmatrix}1&1&4&3\\0&-1&-13&-10\\0&0&1&1\\0&0&-29&-18\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+29r_3}(-6)\begin{vmatrix}1&1&4&3\\0&-1&-13&-10\\0&0&1&1\\0&0&0&11\end{vmatrix}=66.$$

例 1.2.2 证明

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&&&\\ \vdots&&\vdots&&0&\\ a_{k1}&\cdots&a_{kk}&&&\\ c_{11}&\cdots&c_{1k}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ c_{n1}&\cdots&c_{nk}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}=D_1D_2.$$

证 对 D_1 作若干次行变换 $r_i+\lambda r_j$，可化为下三角行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix}p_{11}&&0\\ \vdots&\ddots&\\ p_{k1}&\cdots&p_{kk}\end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk},$$

对 D_2 作列变换 $c_i+\mu c_j$，可化为下三角行列式，即

$$D_2=\begin{vmatrix}q_{11}&&0\\ \vdots&\ddots&\\ q_{n1}&\cdots&p_{nk}\end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nk}.$$

对 D 的前 k 行作如上的行变换 $r_i+\lambda r_j$，再对后 n 列作如上的列变换 $c_i+\mu c_j$，可化为下三角行列式，即

$$D=\begin{vmatrix}p_{11}&&&&&\\ \vdots&\ddots&&&0&\\ p_{k1}&\cdots&p_{kk}&&&\\ c_{11}&\cdots&c_{1k}&q_{11}&&\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\ddots&\\ c_{n1}&\cdots&c_{nk}&q_{n1}&\cdots&q_{nn}\end{vmatrix},$$

于是有 $D=p_{11}\cdots p_{kk}\cdot q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2$.

例 1.2.3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

解 从第 4 行开始后行减前行

$$D\xlongequal[r_2-r_1]{r_4-r_3,r_3-r_2}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4.$$

例 1.2.4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

解 $D\xlongequal{r_1+ar_2}\begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}\xlongequal[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 1+ab & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_3+(1+ab)r_2}\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & a+c+abc & 1+ab \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & a+c+abc & 1+ab \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+(a+c+abc)r_3}-\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1+ab+ad+cd+abcd \end{vmatrix}$$

$$=abcd+ab+cd+ad+1.$$

1.3 行列式的展开式

1.3.1 余子式与代数余子式的概念

从行列式的定义不难看出，行列式的阶数越高计算就越复杂. 事实上，利用行列式展开法，高阶行列式可由低阶行列式表示出来. 为此，本节首先给出行列式的余子式与代数余子式的概念.

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，剩下的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}，给余子式 M_{ij} 冠以符号 $(-1)^{i+j}$ 称为 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如，四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 中，元素 a_{23} 的余子式为将行列式中的第 2 行和第 3 列划去，所得的三阶行列式 $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$，其代数余子式则为 $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$.

1.3.2 行列式的按行(列)展开法则

定理 1.3.1 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

证 首先，根据行列式的性质 1.2.5 可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} D_j.$$

其次,考虑

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

经过 $i-1$ 次行对换 $r_k \leftrightarrow r_{k-1}(k = i, i-1, \cdots, 2)$，得

$$D_j = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

再经过 $j-1$ 次列对换 $c_k \leftrightarrow c_{k-1}(k = j, j-1, \cdots, 2)$，得

$$D_j = (-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1j} & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+1j} & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

根据例 1.2.2 可得 $D_j=(-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$. 于是有

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

类似地，若按列证明可得：$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\,(j=1,2,\cdots,n)$.

定理 1.3.1 称为**行列式按行(列)展开定理**.

推论 1.3.1 行列式某一行(列)的各个元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j$，或 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\ i\neq j$.

证 由于

$$a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{j1}&\cdots&a_{jn}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

现把等式两端的 a_{jk} 换成 $a_{ik}\,(k=1,\cdots,n)$ 可得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=0\quad(i\neq j).$$

同理按列证明即可得 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\ (i\neq j)$.

于是有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}\tag{1.3.1}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}\tag{1.3.2}$$

当行列式中的某行(列)有一些元素为零时，运用行列式展开法计算行列式比较简单. 值得注意的是，在计算行列式时，常常需要将行列式的性质与展开定理结

合起来，灵活运用这些方法.

例 1.3.1 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$.

解 将行列式按第 1 列展开得

$$D_n = (-1)^{1+1} x \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} = xD_{n-1} + a_n$$

$$= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = \cdots = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n.$$

例 1.3.2 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 表示元素 a_{ij} 的代数余子式，计算 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$.

解 因为用 1, 1, 1, 1 代替 D 的第一行所得的行列式值等于 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$，于是

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - r_1]{r_4 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 + c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

例 1.3.3 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

证 用数学归纳法：因为 $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant 2} (x_i - x_j)$，所以 $n=2$ 时等式成立. 假设等式对于 $n-1$ 阶行列式成立，要证明等式对 n 阶范德蒙德行列式也成立. 设法把 D_n 降阶，从第 n 行开始，后一行减前一行的 x_1 倍，得

$$D_n \xlongequal[i=n,\, n-1,\, \cdots,\, 2]{r_i - x_1 r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix},$$

按第 1 行展开，并把每一列的公因子 $(x_i - x_j)$ 提出，有

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

按归纳假设，上式右端等于所有 $(x_i - x_j)$ 因子的乘积，其中 $2 \leqslant j < i \leqslant n$，故

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

例 1.3.4 计算 $2n$ 阶行列式 $D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}$，其中未写出的元素均为 0.

解 按第 1 行展开

$$D_{2n}=(-1)^{1+1}a\begin{vmatrix}a & & & & b & 0\\ & \ddots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ c & & & & d & 0\\ 0 & & & & 0 & d\end{vmatrix}+(-1)^{1+2n}b\begin{vmatrix}0 & a & & & & b\\ & & \ddots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & a & b & \\ & & & c & d & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \ddots & \\ 0 & c & & & & d\\ c & 0 & & & & 0\end{vmatrix},$$

再将上面的两个行列式都按第 $2n-1$ 行(最后一行)展开,可得

$$\begin{aligned}D_{2n}&=adD_{2(n-1)}-bcD_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots\\&=(ad-bc)^{n-1}D_{2(n-(n-1))}=(ad-bc)^n.\end{aligned}$$

于是 $D_{2n}=(ad-bc)^n$.

1.4 克拉默法则

本节介绍行列式的一个重要应用,那就是应用行列式求解线性方程组的克拉默法则.

定理 1.4.1(克拉默法则) 如果 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \quad\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{1.4.1}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$,那么线性方程组(1.4.1)有唯一解,

并且解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D},\tag{1.4.2}$$

其中 D_j 是把行列式 D 中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 分别换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所成的行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\quad j=1,2,\cdots,n.\tag{1.4.3}$$

定理 1.4.1 中包含着三个结论：① 方程组有解；② 解是唯一的；③ 解由公式(1.4.2)给出. 这三个结论是有联系的. 由于定理 1.4.1 利用后面的逆矩阵的性质可以方便地证明，因此此处不再给出其证明过程，其证明的步骤是：

(1) 把式(1.4.2)代入方程组，验证它确是方程组(1.4.1)的解.

(2) 假如方程组(1.4.1)有解，证明该解必由公式(1.4.2)给出.

例 1.4.1 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27\neq 0$，则方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27,\quad D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27.$$

由克拉默法则可得，方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=3$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=-4$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1$，$x_4=\dfrac{D_4}{D}=1$.

推论 1.4.1 如果线性方程组(1.4.1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式 $D=0$.

对于线性方程组(1.4.1)，若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零，则称线性方程组为**非齐次线性方程组**；特殊地，若常数项全为零，即 $b_i\equiv 0\,(i=1, 2, \cdots, n)$，则称线性方程组为**齐次线性方程组**. 齐次方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0. \end{cases} \tag{1.4.4}$$

显然齐次方程组总是有解的，由于 $x_i \equiv 0(i=1, 2, \cdots, n)$ 是齐次方程组的一个解，它称为齐次方程组的**零解**. 对于齐次线性方程组，我们关心的问题常常是，它除了零解以外，还有没有其他解，或者说，它有没有非零解. 对齐次线性方程组，应用克拉默法则就有以下定理.

定理 1.4.2 如果齐次线性方程组(1.4.4)的系数矩阵的行列式 $D\neq 0$，那么它只有零解.

换句话说，如果齐次线性方程组(1.4.4)有非零解，那么必有 $D=0$.

例 1.4.2 求 λ 在什么条件下，方程组 $\begin{cases} x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ \lambda x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$ 有非零解.

解 考虑方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & -(1+\lambda) & 0 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix}=-(1+\lambda)(2-\lambda).$$

根据定理 1.4.2，当 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=2$ 时，$D=0$，方程组有非零解.

推论 1.4.2 若齐次线性方程组未知量的个数大于方程组中方程的个数，即对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases} \tag{1.4.5}$$

若 $m<n$，则齐次线性方程组(1.4.5)一定有非零解.

证 由于 $m<n$，现给线性方程组(1.4.5)补充 $n-m$ 个方程：$0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=0$，那么所得齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \\ 0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=0 \end{cases}$ 与方程组(1.4.5)等价，显然，该方程的系数行列式 $D=0$，故有非零解.

习 题 1

1. 利用对角线法则计算下列二阶、三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$； (5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

2. 按自然数从小到大的顺序为标准次序，确定下列各排列的逆序数：

(1) 1234； (2) 4321；

(3) 3421； (4) 2413；

(5) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$；

(6) $24\cdots(2n)13\cdots(2n-1)$.

3. 写出五阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{32}a_{53}$ 的项.

4. 写出多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & -1 & x \\ 0 & 4 & 1 & x^2 \\ 1 & 8 & -5 & x^3 \end{vmatrix}$ 中 x^4 的系数.

5. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$； (5) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；

(6) $\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$（其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$）；

(7) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$.

6. 若三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1-a_1 & 2b_2-a_2 & 2b_3-a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=x$，求三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

7. 计算 n 阶行列式 (1) $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$.

8. 证明下列等式：

(1) 上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

(2) 对角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

(3) $\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$；

(4) $\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix}=(b-a)^3$；

(6) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$.

9. 用数学归纳法证明 $\begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\varphi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix} = \cos n\varphi$.

10. 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -11$，求 x.

11. 用克拉默法则解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=2, \\ 2x_1+x_2+x_3=-1, \\ 2x_1+2x_2+x_3=1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2=1, \\ x_1+x_2+2x_3=0, \\ x_2+x_3+2x_4=0, \\ x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_4+x_5=1. \end{cases}$

12. 当常数 k 为何值时，方程组 $\begin{cases} kx_1+x_2+2x_3=1, \\ x_1+kx_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=1 \end{cases}$ 有唯一解？在有唯一解的情况下，求出该解.

习 题 答 案

习 题 1

1. (1) $4ab$, (2) 1, (3) -1, (4) 5, (5) $(c-a)(c-b)(b-a)$, (6) $-2(x^3+y^3)$.

2. (1) 0, (2) 6, (3) 5, (4) 3, (5) $\dfrac{n(n-1)}{2}$, (6) $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. $a_{11}a_{25}a_{32}a_{44}a_{53}$, $-a_{11}a_{24}a_{32}a_{45}a_{53}$.

4. 2.

5. (1) -160, (2) 6, (3) 2, (4) 0, (5) $4abcdef$, (6) $\left(a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{c_ib_i}{a_i}\right)\prod\limits_{i=2}^{n}a_i$.

   (7) $(a_{11}a_{44}-a_{14}a_{41})(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$

6. $\dfrac{x}{2}$.

7. (1) $(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$, (2) $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$.

8. 略.

9. 略.

10. $x=\pm 2$.

11. (1) $x_1=-\dfrac{4}{3}$, $x_2=2$, $x_3=-\dfrac{1}{3}$;

    (2) $x_1=3$, $x_2=-1$, $x_3=-1$, $x_4=1$, $x_5=0$;

    (3) $k\neq\dfrac{5\pm 3\sqrt{5}}{2}$, $x_1=-\dfrac{k+2}{k^2-5k-5}$, $x_2=\dfrac{k-1}{k^2-5k-5}$, $x_3=\dfrac{k^2-2k-2}{k^2-5k-5}$.

习 题 2

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&3\\5&3&6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3&-1&5\\-1&-1&4\end{pmatrix}$, $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-8&-3&11\\-5&-4&7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-6&1\\0&13\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}-6&0\\1&13\end{pmatrix}$.

2. $\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}8&-1&3\\-1&2&7\end{pmatrix}$.